ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 23, No. 2, 1976

UNE MÉTHODE TOPOLOGIQUE POUR L'ETUDE DE LA PROPRIÉTÉ DE RAMSEY

PAR
ALAIN LOUVEAU

ABSTRACT

The paper is devoted to the study of some particular subclasses of the class of Ramsey sets, each one associated with an ultrafilter on $\mathbb{N}$. By topological methods, we show that every such class contains the analytic sets. This generalizes the results of Silver and Mathias on this subject. Furthermore some applications to functional analysis are given, and a discussion of the additivity of these classes and of the Ramsey property of the ultrafilters is presented, under the hypothesis of Martin's Axiom.

Cet article est consacré à l'étude d'une sous-famille des sous-ensembles Ramsey de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, où $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$. Cette sous-famille, $\mathcal{C}_\mathcal{U}$, définie à partir d'un ultrafiltre non trivial $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$, permet de généraliser les théorèmes de Silver et de Mathias concernant les ensembles analytiques.

La première partie du travail est consacrée à la définition de la famille $\mathcal{C}_\mathcal{U}$, et à la démonstration du résultat principal de cette section: il existe une topologie sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, plus fine que la topologie produit, et pour laquelle les ensembles ayant la propriété de Baire sont exactement les éléments de $\mathcal{C}_\mathcal{U}$.

On déduit facilement de ce résultat la stabilité par l'opération A de Souslin de la famille $\mathcal{C}_\mathcal{U}$, donc les résultats de Silver et de Mathias sur les ensembles analytiques.†

Dans la seconde partie, nous appliquons les résultats de la première section aux problèmes d'extration de sous-suites. Un corollaire du théorème principal permet d'obtenir dans certains cas un théorème d'unicité de limites. Ce résultat est ensuite appliqué au problème des suites simplement convergentes presque partout en moyenne de Césaro dans les espaces $L_1(\mu)$.

† Depuis la rédaction de cet article, E. Ellentuck a publié, au J. Symbolic Logic **39** (1974), un article, *A new proof that analytic sets are Ramsey*, dans lequel il démontre directement, par une méthode topologique analogue à la notre, le théorème de Silver, en n'utilisant que l'axiome du choix dépendant.

Received October 9, 1974

La troisième section est consacrée à l'étude du degré d'additivité de la famille $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ selon l'ultrafiltre $\mathscr{U}$. Ceci fournit une classification des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$ selon les cardinaux $\leqq 2^{\aleph_0}$, classification dont nous démontrons que moyennant des hypothèses convenables, par exemple $\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$, elle établit des distinctions à l'intérieur des classes d'ultrafiltres déjà étudiées, et en particulier des ultrafiltres absolus.

1. La classe $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ des ensembles complètement $\mathscr{U}$-Ramsey

Si X est un ensemble, désignons par $\mathscr{P}(X)$ [resp. $\mathscr{P}_\infty(X), \mathscr{P}_f(X)$] les sous-ensembles [resp. infinis, finis] de X.

Une partie $\mathscr{X}$ de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ est dite Ramsey s'il existe une partie infinie X de $\mathbb{N}$ telle que $\mathscr{P}_\infty(X) \subset \mathscr{X}$ ou $\mathscr{P}_\infty(X) \subset \complement\mathscr{X}$ ($\complement\mathscr{X}$ désigne le complémentaire de $\mathscr{X}$).

Historiquement, l'étude de la propriété de Ramsey des sous-ensembles de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ a consisté à démontrer successivement que les ensembles ouverts, puis boréliens puis analytiques pour la topologie produit de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ étaient Ramsey. Et pour obtenir ces résultats, on a cherché à démontrer la stabilité par certaines opérations de la famille des ensembles Ramsey.

Malheureusement il est facile de voir que cette famille, au moins en présence de l'axiome du choix, est très peu stable (elle n'est alors pas stable par intersection finie). Aussi la difficulté a été d'isoler des sous-familles de cette famille, contenant les ouverts, et possédant de meilleures propriétés de stabilité. C'est ce qu'ont fait Galvin, Prikry puis Silver avec la famille des ensembles complètement Ramsey (cf. [9]).

Nous proposons ici une autre sous-famille, $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$, définie à partir d'un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, et qui offre d'une part l'avantage de permettre des démonstrations directes (la démonstration du théorème de Silver ne fait intervenir par notre méthode que l'existence d'un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$), deuxièmement d'englober à la fois les résultats de Silver et de Mathias sur les ensembles analytiques, et enfin de donner les résultats sous une forme topologique qui facilite les applications.

Notations: Dans toute la suite, $\mathscr{U}$ désignera un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. Nous noterons $\Phi_{\mathscr{U}}$ l'ensemble des applications φ de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ dans $\mathscr{U}$.

Soit $\varphi \in \Phi_{\mathscr{U}}$, et $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$, $x_{p+1} > x_p$, une partie de $\mathbb{N}$. Nous dirons X satisfait φ si $x_1 \in \varphi(\emptyset)$ et pour tout $p < \operatorname{card} X$, $x_{p+1} \in \varphi(\{x_1, \cdots, x_p\})$.

Nous noterons $\mathscr{O}_\varphi = \{X, X\ \textit{satisfait}\ \varphi\}$, et $\mathscr{O}_\varphi^\infty = \mathscr{O}_\varphi \cap \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, $\mathscr{O}_\varphi^f = \mathscr{O}_\varphi \cap \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$.

Soit Δ la différence symétrique. Si $I \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, $\mathscr{X} \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, nous noterons $I\Delta\mathscr{X} = \{I\Delta X, X \in \mathscr{X}\}$, et si $\varphi \in \Phi_{\mathscr{U}}$, $\mathscr{O}_{I,\varphi} = I\Delta\mathscr{O}_\varphi$, et de même pour $\mathscr{O}_{I,\varphi}^\infty$ et $\mathscr{O}_{I,\varphi}^f$.

DÉFINITION 1.1. Une partie $\mathscr{X} \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ est dite complètement $\mathscr{U}$-Ramsey si elle vérifie:

$$\forall I \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N}), \quad \exists \varphi \in \Phi_{\mathscr{U}}, \quad \mathscr{O}^\infty_{I,\varphi} \subset \mathscr{X} \quad \text{ou} \quad \mathscr{O}^\infty_{I,\varphi} \subset \complement\mathscr{X}.$$

Nous noterons $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ l'ensemble des parties complètement $\mathscr{U}$-Ramsey de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$.

La Définition 1.1 peut paraître peu naturelle. Cependant elle représente un bon raffinement de la propriété de Ramsey et de la propriété étudiée par Mathias et par l'auteur pour les ultrafiltres absolus, comme le montrent les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 1.2. *Soit $\mathscr{X}$ complètement $\mathscr{U}$-Ramsey. Alors $\mathscr{X}$ est Ramsey.*

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier que si $\varphi \in \Phi_{\mathscr{U}}$, alors l'application $\tilde{\varphi}$ définie par

$$\tilde{\varphi}(\{x_1, \cdots, x_n\}) = \bigcap_{p \leqq n} \varphi(\{x_1, \cdots, x_p\})$$

vérifie $\tilde{\varphi} \in \Phi_{\mathscr{U}}$, $\mathscr{O}^\infty_{\tilde{\varphi}} \subset \mathscr{O}^\infty_\varphi$ et $\forall X \in \mathscr{O}^\infty_{\tilde{\varphi}}$, $\mathscr{P}_\infty(X) \subset \mathscr{O}^\infty_{\tilde{\varphi}}$.

Si $\mathscr{X} \in \mathscr{C}_u$, il existe alors φ telle que $\mathscr{O}^\infty_\varphi \subset \mathscr{X}$ ou $\mathscr{O}^\infty_\varphi \subset \complement\mathscr{X}$. Si $X \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ satisfait $\tilde{\varphi}$, alors $\mathscr{P}_\infty(X) \subset \mathscr{X}$ ou $\mathscr{P}_\infty(X) \subset \complement\mathscr{X}$.

PROPOSITION 1.3. *Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre absolu, et $\mathscr{X}$ complètement $\mathscr{U}$-Ramsey. Alors $\mathscr{X}$ vérifie la propriété de Mathias, c'est-à-dire*

$$\exists U \in \mathscr{U}, \quad \mathscr{P}_\infty(U) \subset \mathscr{X} \quad ou \quad P_\infty(U) \subset \complement\mathscr{X}.$$

DÉMONSTRATION. Nous utilisons l'une des propriétés caractéristiques des ultrafiltres absolus, énoncée par Sirota et étudiée dans [6], et qui avec nos notations s'exprime de la façon suivante:

Il y a équivalence, pour un ultrafiltre non trivial $\mathscr{U}$ sur $\mathbb{N}$, entre

(1) $\mathscr{U}$ est absolu

(2) pour toute $\varphi \in \Phi_{\mathscr{U}}$, il existe $\varphi' \in \Phi_{\mathscr{U}}$, φ' constante, telle que $\mathscr{O}^\infty_{\varphi'} \subset \mathscr{O}^\infty_\varphi$.

La Proposition 1.3 se déduit immédiatement de ce résultat. ∎

REMARQUE. Dans [7], nous avons étudié la famille $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ lorsque $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre absolu. La Proposition 1.3 montre que la définition donnée dans [7] et notre définition de $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ coincident dans le cas $\mathscr{U}$ absolu. Nous reviendrons dans la troisième section sur cette proposition et sur la propriété de Mathias.

Les résultats de Silver peuvent être déduits de l'étude faite dans [7], mais nécessitent alors l'hypothèse parasite de l'existence d'un ultrafiltre absolu sur $\mathbb{N}$.

Nous allons maintenant introduire les deux outils importants de cette section: la topologie $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ et une application $m_{\mathcal{U}}$ qui "mesurera" la grosseur d'un ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ relativement à la propriété d'être complètement $\mathcal{U}$-Ramsey. Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur un espace X, et $Y \subset X$ $\mathcal{T}$-adh Y désigne l'adhérence dans X de Y pour la topologie $\mathcal{T}$.

DÉFINITION 1.4. (1) Nous noterons $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ la topologie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dont une base est formée des ensembles $\mathcal{O}_{I,\varphi}$, $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$, et $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\infty$ [resp. $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^f$] la topologie induite par $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ [resp. $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$].

(2) Pour $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, on note

$$m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X}) = \{I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \quad \exists \varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}, \quad \mathcal{O}_{I,\varphi}^\infty \subset \mathcal{X}\}.$$

Les topologies $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^f$ sont étudiées dans [6], où il est prouvé que ce sont des topologies extrêmement discontinues plus fines que la topologie produit. Le résultat est obtenu à partir d'un lemme dont nous aurons besoin:

LEMME 1.5. *Soit $\mathcal{M}$ une partie de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Pour que $\mathcal{M}$ soit ouverte pour $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^f$, il faut et il suffit que $\mathcal{M}$ vérifie*

$$\forall I \in \mathcal{M}, \quad \{n, I \cup \{n\} \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{U}.$$

L'application $m_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}))$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$ doit être considérée intuitivement comme une mesure intérieure des ensembles $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. On vérifie facilement que $m_{\mathcal{U}}$ vérifie

(1) $m_{\mathcal{U}}$ est croissante pour l'inclusion

(2) $\forall x, y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}))$, $m_{\mathcal{U}}(x) \cap m_{\mathcal{U}}(y) = m_{\mathcal{U}}(x \cap y)$

(3) $\mathcal{X} \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}} \Rightarrow m_{\mathcal{U}}(\complement \mathcal{X}) = \complement m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$.

PROPOSITION 1.6. *Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$ est ouvert et fermé pour $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^f$.*

DÉMONSTRATION. (1) Soit $I \in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$, il existe par définition $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$ telle que $\mathcal{O}_{I,\varphi}^\infty \subset \mathcal{X}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{O}_{I,\varphi}^f \subset m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$. Donc $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$ est $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^f$-ouvert.

(2) Soit $I \not\in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$. Si $F_0 = \{n, I \cup \{n\} \in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})\} \in \mathcal{U}$, on définit, pour $n \in F_0$, $\varphi_n \in \Phi_{\mathcal{U}}$ telle que

$$\mathcal{O}_{I \cup \{n\}, \varphi_n}^\infty \subset \mathcal{X}.$$

Soit alors φ définie par $\varphi(\emptyset) = F_0$

$$\text{et} \quad \varphi(\{x_1, \cdots, x_p\}) = \begin{cases} \varphi_{x_1}(\{x_2, \cdots, x_p\}) & \text{si} \quad x_1 \in F_0 \\ \mathbb{N} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Alors $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$, et $\mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi} \subset \bigcup_{n \in F_0} \mathcal{O}^{\infty}_{I \cup \{n\}, \varphi_n} \subset \mathcal{X}$.

Par suite $I \in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$, ce qui est contradictoire. Donc

$$\forall I \notin m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X}), \quad \{n, I \cup \{n\} \in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})\} \in \mathcal{U}.$$

On peut alors appliquer le Lemme 1.5: $\complement m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$ est $\mathcal{G}^f_{\mathcal{U}}$-ouvert. ∎

PROPOSITION 1.7. *Soit $\mathcal{O}$ un $\mathcal{G}^{\infty}_{\mathcal{U}}$-ouvert.* $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}) = \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \cap \mathcal{G}_{\mathcal{U}}\text{-adh}(\mathcal{O})$.

DÉMONSTRATION. (1) Si $I \in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O})$, et $\mathcal{O}_{I,\varphi}$, $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$, est un voisinage ouvert de I pour $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$, il faut prouver que $\mathcal{O}_{I,\varphi} \cap \mathcal{O}$ est non vide.

Mais comme $I \in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O})$, $\exists \varphi_I \in \Phi_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi_I} \subset \mathcal{O}$.

Donc $\mathcal{O}_{I,\varphi} \cap \mathcal{O} \supset \mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi} \cap \mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi_I} \supset \mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi \cap \varphi_I} \neq \emptyset$, où $\varphi \cap \varphi'$ est définie par $\varphi \cap \varphi'(J) = \varphi(J) \cap \varphi'(J)$, $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.

(2) Soit $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \cap \mathcal{G}_{\mathcal{U}}\text{-adh}(\mathcal{O})$, et soit $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$. $\mathcal{O}_{I,\varphi} \cap \mathcal{O}$ est non vide, et $\mathcal{G}^{\infty}_{\mathcal{U}}$ ouvert. Par suite $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}_{I,\varphi} \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset$.

Mais comme $\mathcal{O}^f_{I,\varphi} \cap m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}) = m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi}) \cap m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}) = m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}_{I,\varphi} \cap \mathcal{O})$, nous en déduisons que $I \in \mathcal{G}^f_{\mathcal{U}}\text{-adh}(m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}))$. Mais d'après la Proposition 1.6, $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O})$ est $\mathcal{G}^f_{\mathcal{U}}$-fermé, donc $I \in m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O})$. ∎

COROLLAIRE 1.8. *Soit $\mathcal{O}$ un $\mathcal{G}^{\infty}_{\mathcal{U}}$-ouvert. $\mathcal{O} \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver l'inclusion $\complement m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}) \subset m_{\mathcal{U}}(\complement \mathcal{O})$. Si $I \notin m_{\mathcal{U}}(\mathcal{O})$, $I \notin \mathcal{G}_{\mathcal{U}}\text{-adh}(\mathcal{O})$ d'après la Proposition 1.7, donc

$$\exists \varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}, \quad \mathcal{O}_{I,\varphi} \cap \mathcal{O} = \emptyset.$$

Alors $\mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi} \subset \complement \mathcal{O}$, donc $I \in m_{\mathcal{U}}(\complement \mathcal{O})$. ∎

PROPOSITION 1.9. *Soit $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles complètement $\mathcal{U}$-Ramsey. Il existe $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$ telle que, pour tout n, $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{O}^{\infty}_{\varphi}$ soit ouvert et fermé pour $\mathcal{G}^{\infty}_{\mathcal{U}}$.*

DÉMONSTRATION. A chaque $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, associons $\varphi_I \in \Phi_{\mathcal{U}}$ vérifiant

$$\mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi_I} \subset \mathcal{X}_I \quad \text{ou} \quad \mathcal{O}^{\infty}_{I,\varphi_I} \subset \complement \mathcal{X}_I$$

et posons $\varphi(I) = \bigcap_{J \subset I} \varphi_J(I)$. Nous allons prouver que φ convient:

Si $X \in \mathcal{X}_n \cap \mathcal{O}^{\infty}_{\varphi}$, et $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$, on a d'après la définition de φ, en posant $X_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$

$$X \in \mathcal{O}^{\infty}_{X_n, \varphi_{X_n}}.$$

Par suite $\mathcal{O}^{\infty}_{X_n,\varphi_{X_n}} \cap \mathcal{X}$ est non vide, donc $\mathcal{O}^{\infty}_{X_n,\varphi_{X_n}} \subset \mathcal{X}_n$, ce qui montre que $\mathcal{O}^{\infty}_{X_n,\varphi_{X_n}} \cap \mathcal{O}^{\infty}_{\varphi}$ est un $\mathcal{G}^{\infty}_{\mathcal{U}}$-ouvert contenant X et contenu dans $\mathcal{O}^{\infty}_{\varphi} \cap \mathcal{X}_n$. Donc

$\mathcal{O}^\infty_\varphi \cap \mathcal{X}_n$ est voisinage de tous ses points, donc $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-ouvert. Appliquant le même raisonnement à $\complement\mathcal{X}_n$, on en déduit que $\mathcal{O}^\infty_\varphi \cap \mathcal{X}_n$ est $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-ouvert et fermé. ■

COROLLAIRE 1.10. *$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ est stable par unions dénombrables (donc en particulier tout $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-borélien est dans $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$).*

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{X}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$, et φ telle que $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi$ est $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-ouvert. Alors $(\bigcup_n \mathcal{X}_n) \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi$ est $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-ouvert, donc d'après 1.8, $(\bigcup_n \mathcal{X}_n) \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$. Mais ceci implique qu'il existe $\varphi' \in \Phi_{\mathcal{U}}$ telle que $\mathcal{O}^\infty_{\varphi'} \subset (\bigcup_n \mathcal{X}_n) \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi$ ou $\mathcal{O}^\infty_{\varphi'} \subset \complement((\bigcup_n \mathcal{X}_n) \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi)$, donc $\mathcal{O}^\infty_{\varphi' \cap \varphi} \subset \complement(\bigcup_n \mathcal{X}_n)$.
Par suite $\emptyset \in m_{\mathcal{U}}(\bigcup_n \mathcal{X}_n) \cup m_{\mathcal{U}}(\complement(\cup \mathcal{X}_n))$. Le même raisonnement appliqué aux translatés $(I \Delta \mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour chaque $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, prouve que

$$m_{\mathcal{U}}\Big(\bigcup_n \mathcal{X}_n\Big) \cup m_{\mathcal{U}}\Big(\complement \bigcup_n \mathcal{X}_n\Big) = \mathcal{P}_f(\mathbb{N}).$$

Donc $\bigcup_n \mathcal{X}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$. ■

COROLLAIRE 1.11. *Soit $\mathcal{C}^*_{\mathcal{U}} = \{\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}),\ m_{\mathcal{U}}(\complement\mathcal{X}) = \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$. Alors*
(1) $\mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \mathcal{X} \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ et $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X}) = \emptyset$
(2) $\mathcal{C}^*_{\mathcal{U}}$ est un σ-idéal.

DÉMONSTRATION. (1) est immédiat. Remarquons qu'un $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$ ouvert non vide n'est jamais dans $\mathcal{C}^*_{\mathcal{U}}$.
(2) $\mathcal{C}^*_{\mathcal{U}}$ est évidemment un idéal. Soit $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^*_{\mathcal{U}}$. Par translation, nous pouvons donc nous ramener à démontrer que $\emptyset \in m_{\mathcal{U}}(\complement \bigcup_n \mathcal{X}_n)$. D'après 1.9, $\exists \varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$ telle que $\forall n \mathcal{X}_n \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi$ soit ouvert pour $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{U}}$. Comme $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{O}^\infty_\varphi \neq \emptyset$, donc $\mathcal{O}^\infty_\varphi \subset \complement \bigcup_n \mathcal{X}_n$. ■

COROLLAIRE 1.12. *$\mathcal{C}^*_{\mathcal{U}}$ est l'ideal des ensembles $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$ rares, qui coincide avec l'idéal des ensembles $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-maigres.*

DÉMONSTRATION. Ceci résulte des deux remarques suivantes:
(1) $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-int}(\mathcal{X}) = \emptyset \Leftrightarrow m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X}) = \emptyset$: En effet si $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$, $\mathcal{X}$ contient un ouvert non vide $\mathcal{O}^\infty_{I,\varphi}$ et si $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-int}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$, alors $\emptyset \neq m_{\mathcal{U}}(\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{int}(\mathcal{X})) \subset m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X})$.
(2) Si $\mathcal{X} \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$, alors $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X}) = m_{\mathcal{U}}(\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X})$: En effet $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{X}) \subset m_{\mathcal{U}}(\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X})$ et si $I \notin m_{\mathcal{U}}(x)$, alors comme $\mathcal{X} \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$, $I \in m_{\mathcal{U}}(\complement\mathcal{X})$, donc $\exists \varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$, telle que $\mathcal{O}^\infty_{I,\varphi} \subset \complement\mathcal{X}$, donc $\mathcal{O}^\infty_{I,\varphi} \subset \complement(\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X})$, donc $I \notin m_{\mathcal{U}}(\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X})$.

Supposons $\mathcal{X}\,\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$ rare. Alors $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X}$ est d'intérieur vide, donc $m_{\mathcal{U}}(\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X}) = \emptyset$. D'après 1.8, $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X} \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$. Donc

$$\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}\text{-adh}\,\mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{U}}, \quad \text{donc } \mathcal{X} \text{ aussi}.$$

Réciproquement, si $\mathscr{X} \in \mathscr{C}_{\mathscr{U}}^*$, alors $\mathscr{X} \in \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$, et nous pouvons appliquer (2): $m_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}_{\mathscr{U}}\text{ adh }\mathscr{H}) = \varnothing$. Donc $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}\text{-adh }\mathscr{X} \in \mathscr{C}_{\mathscr{U}}^*$, donc est d'intérieur vide, et $\mathscr{X}$ est rare.

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que d'après 1.11, $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}^*$ est un σ-idéal. On en déduit en particulier que pour $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$, tout maigre est rare. ∎

THÉORÈME 1.13. *Soit $\mathscr{X} \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$. Il y a équivalence entre*

(1) $\mathscr{X} \in \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$

(2) *$\mathscr{X}$ a la propriété de Baire pour $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$.*

DÉMONSTRATION. Le travail a pratiquement été déjà fait: Si $\mathscr{X} \in \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$, alors $m_{\mathscr{U}}(\mathscr{X}) = m_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty\text{-adh }\mathscr{X})$, donc $\mathscr{Y} = \mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty\text{-adh }\mathscr{X} \dot{-} \mathscr{X}$ est un élément de $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ qui vérifie

$$m_{\mathscr{U}}(\mathscr{Y}) = \varnothing. \quad \text{Donc } \mathscr{Y} \in \mathscr{C}_u^*,$$

donc est rare d'après 1.12.

Donc $\mathscr{X} = \mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty\text{-adh } \mathscr{X} \dot{-} \mathscr{Y}$ est de Baire pour $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$.

Réciproquement, si $\mathscr{X}$ a la propriété de Baire pour $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$, $\mathscr{X} = \mathscr{Y} \Delta \mathscr{Y}'$, où $\mathscr{Y}$ est $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$-ouvert et $\mathscr{Y}'$ est $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$-maigre. Mais d'après 1.8 les $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$ ouverts sont dans $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$, et d'après 1.12, les $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$ maigres sont dans $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}^\infty$. Donc $\mathscr{X} \in \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$. ∎

Notons $\mathscr{A}$ la plus petite famille engendrée à partir des ouverts pour la topologie produit sur $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ par l'opération A et par complèmentaire. ($\mathscr{A}$ contient en particulier les ensembles analytiques et les ensembles co-analytiques.)

COROLLAIRE 1.14. *$\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ est stable par l'opération A. En particulier $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$.*

DÉMONSTRATION. Ceci est vrai des ensembles ayant la propriété de Baire sur tout espace topologique. De plus, comme la topologie $\mathscr{G}_{\mathscr{U}}^\infty$ est plus fine que la topologie produit, $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$. ∎

Utilisant ce corollaire et les propriétés 1.2 et 1.3, on en déduit les résultats de Silver et Mathias:

COROLLAIRE 1.15.

(1) *Si $\mathscr{X} \in \mathscr{A}'$, $\mathscr{X}$ est Ramsey.*

(2) *Si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre absolu, et $\mathscr{X} \in \mathscr{A}$, alors $\mathscr{X}$ a la propriété de Mathias relativement à $\mathscr{U}$.*

Dans la seconde section, nous allons appliquer le Théorème 1.13 à des problèmes d'analyse fonctionnelle.

2. Applications à l'analyse fonctionnelle

Nous allons d'abord appliquer le Théorème 1.13 à un résultat d'unicité de limites:

PROPOSITION 2.1. *Soit $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ muni de la topologie $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$, et f une application ayant la propriété de Baire de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ dans un espace E à base dénombrable. Il existe alors $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$ telle que f soit continue sur $\mathcal{O}^\infty_\varphi$, donc en particulier $X \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, tel que f soit continue sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.*

DÉMONSTRATION. E étant à base dénombrable, et f ayant la propriété de Baire de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ dans E, f est continue sur un $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}} - G_\delta$ résiduel de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. Comme pour $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$, tout maigre est rare, f est continue sur un $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$ ouvert dense $\mathcal{O}$. En particulier $\varnothing \in m(\mathcal{O})$, donc $\exists \varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{O}^\infty_\varphi \subset \mathcal{O}$. ■

PROPOSITION 2.2. *Soit f une application continue de $(\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}), \mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}})$ dans un espace E où tout point est un G_δ, vérifiant, pour $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ et $X \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$,*

$$f(I \Delta X) = f(X).$$

Alors f est constante.

DÉMONSTRATION. Si $x \in f(\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}))$, et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinages ouverts de x dans E, les $\varphi^{-1}(V_n)$ sont des $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-ouverts non vides vérifiant $I \Delta \varphi^{-1}(V_n) = \varphi^{-1}(V_n)$, $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Donc $\bigcap_n \varphi^{-1}(V_n)$ est $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$ dense, et f est constante sur cet ensemble et continue partout. Donc f est constante. ■

Utilisant ces deux propositions l'une après l'autre on obtient le:

COROLLAIRE 2.3. *Soit f une application de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ dans E à base dénombrable vérifiant*

(1) *pour tout V ouvert de E, $\varphi^{-1}(V) \in \mathcal{A}$,*

(2) $\forall I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $f(I \Delta X) = f(X)$.

Il existe alors $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$ telle que f soit constante sur $\mathcal{O}^\infty_\varphi$, donc en particulier $X \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tel que f soit constante sur $\mathcal{P}_\infty(X)$.

REMARQUE. Le corollaire a été obtenu indépendemment et plus tôt par Sucheston et Figiel (non publié) qui l'ont appliqué à l'étude de la propriété de Banach-Saks dans les espaces de Banach.

Nous allons l'utiliser pour l'étude de la convergence Césaro presque partout dans les espaces $L_1(\mu)$.

THÉORÈME 2.4. *Soit μ une mesure sur un espace mesurable, et P_0 une propriété des suites de fonctions μ mesurables qui est héréditaire (i.e. toute sous suite d'une suite vérifiant P_0 le vérifie aussi).*

Les deux propositions suivantes sont alors équivalentes:

(1) *De toute suite (f_n) de $L_1(\mu)$ vérifiant P_0, on peut extraire une sous-suite convergeant Césaro simplement μ p.p.*

(2) *De toute suite (f_n) de $L_1(\mu)$ vérifiant P_0, on peut extraire une sous-suite dont toutes les sous suites convergent Césaro simplement μ p.p. vers la même limite.*

DÉMONSTRATION. Soit (f_n) une suite de fonctions de $L_1(\mu)$ vérifiant P_0, et $\mathscr{X} = \{X, (f_n)_{n\in X}$ converge simplement en moyenne de Césaro μ p.p.$\}$.

Si $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$, on note $X_n = \{x_1 \cdots x_n\}$ et $f_I = (1/|I|)\Sigma_{i\in I} f_i$. Alors

$$\mathscr{X} = \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_N \left\{X \mid \mu\left\{x \mid \exists p, \exists q, p \leqq N, q \leqq N \mid f_{X_{m+p}}(x) - f_{X_{m+q}}(x)| \geqq \frac{1}{n}\right\} \leqq \frac{1}{n}\right\}.$$

Comme l'application

$$X \to \mu\left\{x \mid \exists p, \exists q, p \leqq N, q \leqq N \mid f_{X_{m+p}}(x) - f_{X_{m+q}}(x)| \geqq \frac{1}{n}\right\}$$

est localement constante, donc continue, $\mathscr{X}$ est un $F_{\sigma\delta}$ de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ muni de la topologie produit. D'après 1.13, il existe $X_0 \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ tel que $\mathscr{P}_\infty(X_0) \subset \mathscr{X}$ ou $\mathscr{P}_\infty(X_0) \subset \complement\mathscr{X}$. Comme P_0 est héréditaire, $(f_n)_{n\in X_0}$ vérifie P_0. Donc d'après (1), $\mathscr{P}_\infty(X_0) \cap \mathscr{X} \neq \emptyset$. Donc $\mathscr{P}_\infty(X_0) \subset \mathscr{X}$.

Il reste à obtenir l'unicité de la limite. Pour cela, définissons f, de $\mathscr{P}_\infty(X_0)$ dans $L_1(\mu)$, par $f_X(x) = \lim f_{X_n}(x)\,\mu$ p.p. f vérifie $f(I \Delta X) = f(X)$. Pour pouvoir appliquer le Corollaire 2.3, il faut que l'espace image soit à base dénombrable. On pose alors $X = L_1(\mu)$ muni de la topologie de la convergence en mesure, avec la distance $d(f, g) = \inf\{a, \mu\{x \mid f(x) - g(x)| \geqq a\} \leqq a\}$, et $E = \mathrm{adh}_X\{f_I, I \in \mathscr{P}_f(X_0)\}$. E est métrique séparable, donc à base dénombrable, et comme la convergence μ p.p. implique la convergence en mesure,

$$f(\mathscr{P}_\infty(X_0)) \subset E.$$

Enfin, si $g \in E$ et $\varepsilon > 0$, notant $B(g, \varepsilon) = \{f, d(g, f) \leqq \varepsilon\}$, on a

$$f^{-1}(B(g, \varepsilon)) = \{X \in \mathscr{P}_\infty(X_0), \mu\{x \mid f_X(x) - g(x)| > \varepsilon\} \leqq \varepsilon\}$$

$$= \bigcap_q \bigcup_n \bigcap_m \bigcap_k \bigcup_N \left\{X \mid \mu\left\{x, \forall p \leqq N \mid f_{X_{m+p}}(x)| \geqq \varepsilon - \frac{1}{n}\right\} < \varepsilon + \frac{1}{n} + \frac{1}{q}\right\}$$

et comme l'application $X \mapsto \mu\{x, \forall p \leqq N \mid f_{X_{m+p}}(x) - g(x)| \geqq \varepsilon - (1/n)\}$ est localement constante, donc continue, $f^{-1}(B(g, \varepsilon))$ est un $G_{\delta\sigma\delta}$ de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ muni de la topologie produit, donc nous pouvons appliquer le Corollaire 2.3: Il existe $X_1 \in \mathcal{P}_\infty(X_0)$ tel que f soit constante sur $\mathcal{P}_\infty(X_1)$. La suite $(f_n)_{n\in X_1}$ vérifie (2). ■

Chatterjee ([3]), Komlos ([5]) et Gaposhkin ([4]) ont démontré que les deux propriétés (1) et (2) étaient vraies dans tout espace $L_1(\mu)$ lorsque l'on prend pour P_0 la propriété d'être une suite bornée de $L_1(\mu)$.

Mais la démonstration de (2) utilise une propriété technique plus forte que la propriété (1) et qui est héréditaire et vraie dans tout $L_1(\mu)$, alors que par notre méthode, (2) se déduit de (1) sans recourir à une propriété technique auxilliaire.

Remarque. Le Corollaire 2.3 ne reste pas vrai lorsqu'on remplace l'hypothèse E à base dénombrable par E compact séparable, comme le montre le contrexemple suivant, pourtant tentant:

Plaçons nous dans les hypothèses du Théorème 2.4, et soient (f_n) vérifiant (1). On démontre facilement que l'application f définie dans la démonstration du théorème est constante sur un $\mathcal{G}^\infty_{\mathcal{U}}$-ouvert dense, en utilisant 2.1 et 2.2. Par suite la limite commune des sous-suites convergeant Césaro ne dépend que de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

Supposons maintenant avoir une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, bornées en norme par 1. Alors pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, la suite (f_n) est bornée dans $L_1(\mu)$, et d'après le résultat de Gaposhkin, vérifie (1).

Donc $\mathcal{U}$ étant fixé, on peut définir pour chaque μ une fonction unique f_μ de $L_1(\mu)$.

Soit φ l'application $X \to \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f_{X_n}(x)$ converge simplement quand $n \to \infty\}$ de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ dans $2^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$. Alors φ est borélienne et $\varphi(I\Delta X) = \varphi(X)$.

Si nous pouvions appliquer le Corollaire 2.3 à φ, on voit facilement que l'on en déduirait alors une fonction f unique telle que $f = f_\mu$ μ p.p., donc une f universellement mesurable vérifiant (2) pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Mais, en appliquant (2) à chaque ε_x, $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on en déduit que

$$\forall x \quad f(x) = \lim_{\mathcal{U}} f_n(x)$$

et ceci est impossible en général: On peut facilement trouver des f_n, par exemple les fonctions $(1_{\mathcal{U}_n})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\mathcal{U}_n$ est l'ultrafiltre de base $\{n\}$, continues sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et telles que $\lim_{\mathcal{U}} f_n$ ne soit pas universellement measurable.

3. La propriété de Mathias et l'additivité de $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$

Pour étendre à d'autres classes d'ensembles les résultats obtenus pour les ensembles analytiques, deux voies sont possibles: D'une part, étudier l'appartenance à $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ des ensembles projectifs des classes supérieures, et d'autre part, la stabilité de $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ par des opérations non dénombrables, en particulier les unions de cardinal $< 2^{\aleph_0}$.

En faisant cela pour les ensembles complètement Ramsey, Silver ([9]) a démontré d'une part que l'axiome de Martin (MA) implique que les ensembles complètement Ramsey sont stables par unions de cardinal $< c$, donc en particulier $\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implique que les PCA sont Ramsey.

D'autre part, en utilisant les méthodes de Shoenfield, il a prouvé que moyennant l'existence d'un cardinal mesurable, on peut éliminer l'hypothèse parasite $\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Les méthodes employées ici ne conviennent pas pour utiliser les résultats de Shoenfield, puisque la définition de $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ fait intervenir un ultrafiltre non trivial. Aussi les seuls résultats que nous connaissions sont les suivants:

(1) Si $V = L$, on construit facilement un ultrafiltre absolu PCA et CPCA. Comme $\mathscr{U}$ absolu $\rightarrow \mathscr{U} \notin \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$, on en déduit un $\mathscr{U}$ tel que tous les PCA et CPCA ne sont pas nécessairement complètement $\mathscr{U}$-Ramsey.

(2) Avec MA, et si les ensembles PCA sont complètement Ramsey (par exemple si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, ou s'il existe un cardinal mesurable), alors l'ensemble des ultrafiltres $\mathscr{U}$ pour lesquels les PCA sont dans $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ est dense dans $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Mais nous ne savons pas si dans ce cas les PCA sont dans $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ pour tout $\mathscr{U}$.

La seconde direction d'étude va se révéler plus riche. Alors qu'avec MA les ensembles complètement Ramsey sont stables par unions de cardinal $< c$, nous allons voir que sous la même hypothèse, les ensembles $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ peuvent avoir, selon le choix de $\mathscr{U}$, tous les degrés d'additivité possibles. Classant les ultrafiltres selon ce degré, nous obtenons une notion qui établit une distinction à l'intérieur de la famille des ultrafiltres absolus (moyennant $\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$), ce qui répond à une question de G. Choquet.

Au lieu d'étudier directement l'additivité des classes $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$, nous allons nous intéresser à la propriété de Mathias. Comme les deux notions coincident lorsque $\mathscr{U}$ est absolu, nous obtiendrons en même temps les résultats d'additivité pour les deux classes. De plus, ceci permet de caractériser, combinatoirement et topologiquement la propriété qui doit être ajoutée à $\mathscr{U}$ absolu pour que $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ ait un meilleur degré d'additivité.

Les classes $\mathfrak{M}_{\mathscr{U}}$ et $\mathfrak{M}^*_{\mathscr{U}}$ sont définies par analogie avec les classes $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ et $\mathscr{C}^*_{\mathscr{U}}$; en se restreignant aux $\varphi \in \Phi_{\mathscr{U}}$ qui sont constantes. Si cette constante est U on a alors $\mathscr{O}^{\infty}_{\varphi} = \mathscr{P}_{\infty}(U)$, et notant $\mathscr{O}^{\infty}_{I,\varphi}$, par abus de notation, $\mathscr{O}^{\infty}_{I,U}$, on pose

$$\mathfrak{M}_{\mathscr{U}} = \{\mathscr{X} \subset \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{N}),\ \forall I \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N}),\ \exists U \in \mathscr{U}\ \ \mathscr{O}^{\infty}_{I,U} \subset \mathscr{X} \text{ ou } \mathscr{O}^{\infty}_{I,U} \subset \complement\mathscr{X}\}$$

et

$$\mathfrak{M}^*_{\mathcal{U}} = \{\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}),\ \forall I \mathcal{P}_f(\mathbb{N}),\ \exists U \in \mathcal{U}\ \mathcal{O}^\infty_{I,U} \subset \complement \mathcal{X}\}$$

Avec ces nouvelles définitions, la Proposition 1.3, peut être complétée en:

PROPOSITION 3.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes, pour $\mathcal{U}$ ultrafiltre non trivial sur* $\mathbb{N}$:

(1) *$\mathcal{U}$ est absolu*

(2) $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}} = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$

(3) *$\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ est σ-additif*

(4) $\mathcal{B}_0 \subset \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ *[ou $\mathcal{B}_0$ désigne la famille des boréliens de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$].*

DÉMONSTRATION.

(1) $\Rightarrow$ (2) est la Proposition 1.3.

(2) $\Rightarrow$ (3) résulte du Théorème 1.13: $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ est toujours σ-additif.

(3) $\Rightarrow$ (4): Il est facile de vérifier que, pour tout $\mathcal{U}$, les ouverts et fermés pour la topologie produit sont toujours dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$. Par la σ-additivité, on obtient $\mathcal{B}_0 \subset \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$.

(4) $\Rightarrow$ (1): soit $\mathcal{P} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{N}$ en ensembles non dans $\mathcal{U}$. Il faut prouver qu'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\forall n\ \ U \cap X \leqq 1$. Soit $\mathcal{X}_{\mathcal{P}} = \{X, \forall n\, X \cap X_n \leqq 1\}$. $\mathcal{X}_{\mathcal{P}}$ est un F_σ, donc d'aprés (4), $\mathcal{X}_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$. Par suite, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{P}_\infty(U) \subset \mathcal{X}_{\mathcal{P}}$ ou $\mathcal{P}_\infty(U) \subset \complement \mathcal{X}_{\mathcal{P}}$. Comme il est facile de voir que $\mathcal{P}_\infty(U) \cap \mathcal{X}_{\mathcal{P}} \neq \varnothing$, $U \in \mathcal{X}_{\mathcal{P}}$. ∎

La σ-additivité de $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ a été obtenue, dans la première section, grâce à la Proposition 1.9, analogue du lemme de Galvin Prikry pour les ensembles complètement Ramsey (cf. [9]). Comme nous voulons généraliser cette proposition, nous allons d'abord étudier pour quels ultrafiltres la Proposition 1.9 est vraie pour la famille $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$:

DÉFINITION 3.2. Un ultrafiltre libre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ est dit Galvin-Prikry si pour tous $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{X}_n \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{X}_n \cap P_\infty(U)$ soit ouvert dans $\mathcal{P}_\infty(U)$, pour tout n.

LEMME 3.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre P-point sur $\mathbb{N}$. Alors pour toute $\varphi \in \Phi_{\mathcal{U}}$, il existe un $U \in \mathcal{U}$ tel que $\{I, U - I \subset \varphi(I)\}$ est cofinal, pour l'inclusion, à $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.*

DÉMONSTRATION. Soit U^0 qui diagonalise les $\varphi(I)$. Un tel $U^0 \in \mathcal{U}$ existe puisque $\mathcal{U}$ est P-point. On pose alors $U^1_I = \varphi(I) \cap U^0$, $U^2_I = \cap\{U^1_J, \sup J \leqq \sup I\}$, puis $U^3_I = U^2_I - \{[0, \sup(U^0 \cap \complement U^2_I)] \cup [0, \sup I]\}$. On obtient alors une famille (U^3_I) d'éléments de $\mathcal{U}$ qui vérifie (en posant $U^0 = \{x_m, m \in \mathbb{N}\}$)

$$\forall I,\ \exists n(I)\ \ U_3^3=\{x_m, m \geqq n(I)\},\ \text{avec}\ n(I)\leqq n(J)\ \text{pour}\ \sup I \leqq \sup J.$$

Si $\{k, n(\{k\})=k+1\}$ est infini, U^0 convient. Sinon, on peut supposer cet ensemble vide, et on pose $1_{p+1}=n(\{x_{1_p}\})$, puis $U_1=\bigcup_p [x_{1_{2p}}, x_{1_{2p+1}}[$ et $U_2=\bigcup_p [x_{1_{2p+1}}, x_{1_{2p+2}}[$. L'un des U_i, $i=1$ ou 2, est dans $\mathscr{U}$. Il convient: En effect il vérifie que $K=\{k, U-\{x_0,\cdots,x_k\}\subset U^3_{\{x_0\cdots x_k\}}\}$ est infini. Mais si $I\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, $\exists k\in K$, $\sup I=x_k$. Alors $I\subset[0,x_k]$ et

$$U-[0,x_k]=U-\{x_0,\cdots,x_k\}\subseteq U^3_{\{x_0,\cdots,x_k\}}\subset\varphi([0,x_k])$$

par définition des U_J^3. ■

THÉORÈME 3.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes, pour $\mathscr{U}$ ultrafiltre libre sur* $\mathbb{N}$:

(1) *$\mathscr{U}$ est Galvin Prikry*

(2) *$\mathfrak{M}^*_{\mathscr{U}}$ est σ-additif*

(3) *pour toute famille $(U_{I,n})$, $I\in\mathscr{P}_f(N, n\in\mathbb{N}$, d'éléments de $\mathscr{U}$, il existe $U\in\mathscr{U}$ tel que $\forall n$, $\exists I(n)$ vérifiant $I(n)\subset U\subset I(n)\cup U_{I(n),n}$*

(4) *$\mathscr{U}$ est P-point.*

DÉMONSTRATION.

(1) $\Rightarrow$ (2): soient $\mathscr{X}_n\in\mathfrak{M}^*_{\mathscr{U}}$. D'après (1), il existe U tel que $\forall n$, $\mathscr{X}_n\cap\mathscr{P}_\infty(U)$ soit ouvert dans $P_\infty(U)$. Mais un tel ouvert relatif ne peut être dans $\mathfrak{M}^*_{\mathscr{U}}$ que s'il est vide, par suite $\mathscr{P}_\infty(U)\subset\complement(U\mathscr{X}_n)$. Le même raisonnement appliqué aux translatés $(I\Delta\mathscr{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, prouve que $\bigcup_n\mathscr{X}_n\in\mathfrak{M}^*_{\mathscr{U}}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): posons, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{X}_n=\bigcup_{I\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})}\mathcal{O}^\infty_{I,U_{I,n}}$. On vérifie facilement que $\complement\mathscr{X}_n\in\mathfrak{M}^*_{\mathscr{U}}$, donc d'après (2), $\bigcup_n\complement\mathscr{X}_n\in\mathfrak{M}^*_{\mathscr{U}}$. Par suite $\exists U\in\mathscr{U}$ tel que $U\in\bigcap_n\mathscr{X}_n$. Donc $\forall n$, $\exists I(n)$ $U\in\mathcal{O}^\infty_{I(n),U_{I(n),n}}$ et ceci veut exactement dire $I(n)\subset U\subset U_{I(n),n}$.

(3) $\Rightarrow$ (4): si (U_n), $n\in\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{U}$, on pose pour $I\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, $U_{I,n}=U_n$. D'après (3), il existe $U\in\mathscr{U}$ tel que $\forall n$, $\exists I(n)$, $U-I(n)\subset U_n$. Donc $U-U_n$ est fini.

(4) $\Rightarrow$ (3): pour chaque n, on peut trouver d'après le Lemme 3.3 un $U_n\in\mathscr{U}$ tel que $J_n=\{I, U_n-I\subset U_{I,n}\}$ est cofinal à $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$. Si $U\in\mathscr{U}$ diagonalise les U_n, on pose $I^0(n)=U-U_n$, et $I(n)\in J_n$, $I(n)\supset I^0(n)$. Alors $I(n)\cap U\subset U$ et $U-I(n)\cap U\subset U_n-(I^0(n)\cup I(n))=U_n-I(n)\subset U_{I,n}$.

(3) $\Rightarrow$ (1): soient $\mathscr{X}\in\mathfrak{M}_{\mathscr{U}}$. On choisit, pour tout $I\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ $U_{I,n}\in\mathscr{U}$ tel que $\mathcal{O}^\infty_{I,U_{I,n}}\subset\mathscr{X}_n$ ou $\mathcal{O}^\infty_{I,U_{I,n}}\subset\complement\mathscr{X}_n$, et tel que $U_{J,n}\subset U_{I,n}$ pour $J\subset I$. Soit alors $U\in\mathscr{U}$ tel que $\forall n$, $\exists I(n)$, $U-I(n)\subset U_{I(n),n}$, et soit $X\in\mathscr{X}_n\cap P_\infty(U)$. $\mathcal{O}^\infty_{X\cap I(n),U-I(n)}\subset\mathcal{O}^\infty_{X\cap I(n),U_{X_n\cap I(n),n}}$ est contenu dans $\mathscr{X}_n$ ou $\complement\mathscr{X}_n$. Comme $X\in\mathscr{X}_n\cap\mathcal{O}^\infty_{X\cap I(n),U-I(n)}$,

$\mathcal{O}^{\infty}_{X\cap I(n),U-I(n)}$ est un voisinage ouvert de X dans $\mathcal{P}_\infty(U)$, et par suite $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{P}_\infty(U)$ est ouvert dans $\mathcal{P}_\infty(U)$. ∎

Ce théorème va nous permettre de définir des extensions de la notion de P-point en rapport avec l'additivité de $\mathfrak{M}^*_{\mathcal{U}}$, et d'absolu en rapport avec l'additivité de $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$.

Toutes ces extensions n'ont d'interêt qu'en niant l'hypothèse du continu, c'est-à-dire en supposant $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Mais ceci est possible car si les premiers théorèmes d'existence d'ultrafiltres spéciaux utilisaient $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, les travaux de Booth ([2]), puis de Blass ([1]) ont montré que des hypothèses strictement plus faibles suffisaient pour faire les principales constructions, en particulier l'axiome de Martin (MA). Dans cette section, les principaux théorèmes d'existence sont obtenus moyennant cet axiome. En conséquence, les démonstrations utilisent frequemment, dans des lemmes préliminaires, des méthodes de forcing. Pour ces méthodes, et pour l'étude de l'axiome de Martin, nous renvoyons à [8], où est en particulier énoncé le résultat de consistence suivant, qui montre le champ d'application des résultats de cette section:

Soit $\mathcal{M}$ un modèle dénombrable standard de ZF, *et θ un ordinal tel que dans $\mathcal{M}$ "θ est un cardinal régulier et $\theta' < \theta \Rightarrow 2^{\theta'} \leqq \theta$" est vrai. Il existe alors une extension générique de $\mathcal{M}$ qui vérifie* $\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} = \theta$.

Dans ce qui suit, λ, $\aleph$ désigneront des cardinaux, α, β, η, ξ, des ordinaux. Si $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, où X est un ensemble, $\mathfrak{A}$ est dit $\aleph$-additif si pour tout $\lambda < \aleph$, toute union de λ éléments de $\mathfrak{A}$ est dans $\mathfrak{A}$.

L'extension naturelle de la propriété topologique des P-points dans $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ conduit aux définitions suivantes:

DÉFINITION 3.5.

(1) un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ est dit $\aleph$-stable, si pour toute famille $(U_\xi)_{\xi<\lambda}$ d'éléments de $\mathcal{U}$, $\lambda < \aleph$, il existe $U \in \mathcal{U}$, $U - U_\xi$ est fini pour tout $\xi < \lambda$.

(2) Pour tout $\mathcal{U}$, on note $\aleph_p(\mathcal{U}) = \sup\{\aleph, \mathcal{U}$ est $\aleph$-stable$\}$. $\aleph_p(\mathcal{U})$ est appelé degré de stabilité de $\mathcal{U}$.

REMARQUES.

(1) Dans le cas $\aleph = c$, la notion 3.5 (1) avait été envisagée par Booth dans sa thèse ([2]) sous le nom de super P-points.

(2) On a toujours $\aleph_0 \leqq \aleph_p(\mathcal{U}) \leqq 2^{\aleph_0}$ et la notion habituelle de P-point correspond à $\aleph_p(\mathcal{U}) \geqq \aleph_1$.

PROPOSITION 3.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre libre. $\mathcal{U}$ est $\aleph_p$ $(\mathcal{U})$-stable, et $\aleph_p(\mathcal{U})$ est un cardinal régulier.*

DÉMONSTRATION. $\mathcal{U}$ est $\aleph_p(\mathcal{U})$-stable d'après la définition de l'$\aleph$-stabilité. Comme $\mathcal{U}$ n'est pas $\aleph_p(\mathcal{U})^+$ stable, il existe une famille $(U_\xi)_{\xi<\aleph_p(\mathcal{U})}$ d'éléments de $\mathcal{U}$, non diagonalisable. Par $l'\aleph_p(U)$-stabilité de $\mathcal{U}$, on en déduit une famille $(U'_\xi)_{\xi<\aleph_p(\mathcal{U})}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ non diagonalisable et presque décroissante (i.e. décroissante aux ensembles finis près). Mais si $\aleph_p(\mathcal{U})$ n'est pas régulier, il existe A cofinal à $\aleph_p(\mathcal{U})$, card $A < \aleph_p(\mathcal{U})$. Alors la famille $(U'_\xi)_{\xi\in A}$ est diagonalisable et cofinale à $(U'_\xi)_{\xi<\aleph_p(\mathcal{U})}$, ce qui est contradictoire.

La théorème qui suit est l'analogue du Théorème 3.4. Il montre que toutes les généralisations de la notion de P-point envisageables d'après ce théorème sont équivalentes:

THÉORÈME 3.7. *Les propositions suivantes sont équivalentes; pour $\mathcal{U}$ ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$:*

(1) *$\mathcal{U}$ est $\aleph$-Galvin Prikry: Pour toute famille $(\mathcal{X}_\xi)_{\xi<\lambda}$ d'éléments de $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$, et $\lambda<\aleph$, il existe $U\in\mathcal{U}$ tel que $\forall\xi<\lambda$, $\mathcal{X}_\xi\cap\mathcal{P}_\infty(U)$ est ouvert dans $\mathcal{P}_\infty(U)$*

(2) *$\mathfrak{M}^*_{\mathcal{U}}$ est $\aleph$-additif*

(3) *pour tous $(U_{I,\xi})$, $I\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $\xi<\lambda$, $U_{I,\xi}\in\mathcal{U}$ et $\lambda<\aleph$, il existe $U\in\mathcal{U}$ tel que $\forall\xi<\lambda$, $\exists I(\xi)\subset U$ $U-I(\xi)\subset U_{I(\xi),\xi}$*

(4) *$\mathcal{U}$ est $\aleph$-stable.*

DÉMONSTRATION. Si $\aleph=\aleph_0$, les 4 propriétés sont vérifiées pour toute ultrafiltre libre $\mathcal{U}$. Si $\aleph\geqq\aleph_1$, la démonstration est formellement analogue à la démonstration du Théorème 3.4. Dans la démonstration de (4) $\Rightarrow$ (3), on utilise le fait que $\mathcal{U}$ $\aleph$-stable, $\aleph\geqq\aleph_1$, implique $\mathcal{U}$ P-point, donc que l'on peut utiliser le Lemme 3.3.

Nous allons maintenant démontrer l'existence d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ de degré de stabilité donné $\aleph\leqq 2^{\aleph_0}$, en utilisant MA. Booth avait déjà démontré ce résultat d'existence dans le cas $\aleph=2^{\aleph_0}$. La difficulté de la construction dans le cas général provient du fait qu'il faut éviter que $\mathcal{U}$ soit $\aleph^+$-stable, difficulté qui n'existe pas dans le cas étudié par Booth.

La construction par récurrence va être possible grâce au lemme suivant, dû à Solovay, et qui se démontre par des techniques de forcing.

LEMME 3.8. (Solovay, [8].) (MA.) *Soient $\aleph<2^{\aleph_0}$, et $(A_\xi)_{\xi<\aleph}$ et $(B_\xi)_{\xi<\aleph}$ des familles de parties de $\mathbb{N}$ vérifiant pour tous*

$$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n,\ B_{\xi_0}\dot{-}\bigcup_1^n A_{\xi_i}\ \textit{est infinie}.$$

Il existe alors $X \subset \mathbb{N}$ tel que $\forall \xi$, $X \cap A_\xi$ est fini et $X \cap B_\xi$ est infini.

THÉORÈME 3.9. (MA.) *Soit $\aleph$ un cardinal régulier, $\aleph \leqq 2^{\aleph_0}$. L'ensemble des ultrafiltres libres $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ tels que $\aleph_p(\mathcal{U}) = \aleph$ est dense dans $\beta\mathbb{N} \dot{-} \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION. On commence par définir une famille $(X^0_\xi)_{\xi<\aleph}$ strictement presque décroissante, de parties infinies de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall \xi, \eta < \aleph, \xi < \eta \Rightarrow X_\eta - X_\xi \quad \text{est fini},$$

et $\forall \xi < \aleph$, $X_\xi \dot{-} X_{\xi+1}$ est infini. Ceci est possible par applications successives du Lemme 3.8, où on prend pour tout ξ, $B_\xi = \mathbb{N}$. (Si $\aleph = c$, la démonstration est finie.)

On définit ensuite par récurrence une famille $(X_\alpha)_{\alpha<2^{\aleph_0}}$ de parties de $\mathbb{N}$. Soit B l'ensemble des familles $(A_\xi)_{\xi<\lambda}$, $\lambda < \aleph$. Alors

$$\operatorname{card} B \leqq \bigcup_{\lambda<\aleph} 2^\lambda \quad \text{et comme MA} \Rightarrow 2^\lambda \leqq 2^{\aleph_0} \text{ pour } \lambda < 2^{\aleph_0},\ \operatorname{card} B \leqq 2^{\aleph_0}.$$

On indexe B sur les ordinaux $\alpha < 2^{\aleph_0}$, et on construit les X_α vérifiant

(1) $\forall I \in P_f(2^{\aleph_0})$, $\forall \xi < \aleph$, $\exists \eta(I, \xi)$ tel que $X_{I,\xi,\eta} = \bigcap_{\beta\in I} X_\beta \cap X^0_\xi \cap \complement X^0_\eta$ soit infini;

(2) $\forall \alpha$, ou bien $\forall \xi < \lambda_\alpha$, $X_\alpha \cap A^\alpha_\xi$ est fini, ou bien $\exists \xi(\alpha)$, $X_\alpha = A^\alpha_{\xi(\alpha)}$.

Si $\mathcal{U}$ est l'ultrafiltre engendré par les ensembles cofinis, les $(X^0_\xi)_{\xi<\aleph}$ et les $(X_\alpha)_{\alpha<2^{\aleph_0}}$, $\mathcal{U}$ est $\aleph$-stable d'après (2), et non $\aleph^+$-stable puisque d'après (1) il ne diagonalise pas la famille $(X^0_\xi)_{\xi<\aleph}$.

La construction peut être commencée, car $X_{\phi,\xi,\eta} = X^0_\xi \cap \complement X^0_\eta$ est infini pour $\eta > \xi$. Supposons avoir défini les $(X_\beta)_{\beta<\alpha}$.

1er cas: $\forall I \in \mathcal{P}_f(\alpha)$, $\forall \xi < \aleph$, $\exists \eta\ (I, \xi)$ tel que $\forall J \in P_f(\lambda_\alpha)$, $X_{I,\xi,\eta} \dot{-} \bigcup_{\xi'\in J} A^\alpha_{\xi'}$ est infini.

On applique alors le Lemme 3.8 aux deux familles $(A^\alpha_\xi)_{\xi<\lambda_\alpha}$ et $X_{I,\xi,\eta(I,\xi)}$, $I \in \mathcal{P}_f(\alpha)$, $\xi < \aleph$. Si X vérifie les conclusions du lemme, on peut poser $X = X_\alpha$.

2ème cas: Sinon, il existe I_0 et ξ_0 tels que $\forall \eta < \aleph$, $\exists J = \varphi(\eta)$, $J \in \mathcal{P}_f(\lambda_\alpha)$, tel que $X_{I_0,\xi_0,\eta} - \bigcup_{\xi\in J} A^\alpha_\xi$ est fini.

D'après la régularité de $\aleph$, il existe $J_0 \in P_f(\lambda_\alpha)$ tel que $\varphi^{-1}(J_0)$ soit cofinal à $\aleph$.

Si $X = \bigcup_{\xi\in J_0} A^\alpha_\xi$, alors $\forall I, \xi, \eta$, $X \cap X_{I,\xi,\eta}$ vérifie, pour $\eta' \in \varphi^{-1}(J_0)$, $X_{I_0,\xi_0,\eta'} \cap X_{I,\xi,\eta} \dot{-} X \cap X_{I,\xi,\eta}$ est fini et $X_{I_0,\xi_0,\eta'} \cap X_{I,\xi,\eta} = X_{I_0\cup I, \sup(\xi_0,\xi), \inf(\eta',\eta)}$ a un ensemble fini près. Par suite, si $\eta = \eta(I_0 \cup I, \sup(\xi_0, \xi))$ et $\eta' \geqq \eta$ (ce qui est possible d'après la cofinalité de $\varphi^{-1}(J_0)$), alors $X \cap X_{I,\xi,\eta}$ est infini.

Comme $X = \bigcup_{\xi\in J_0} A^\alpha_\xi$ et que l'ensemble des parties ne vérifiant pas (1) est un idéal, l'un des A^α_ξ, $A^\alpha_{\xi(\alpha)}$, vérifie aussi (1). On pose $X_\alpha = A^\alpha_{\xi(\alpha)}$. ∎

REMARQUE. D'après cette démonstration, on voit qu'on peut construire un ultrafiltre de degré de stablilité $\aleph$ dans tout ouvert de $\beta\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

Pour étendre la notion d'ultrafiltre absolu, on peut soit utiliser la Proposition 2.3.1, soit les résultats qui précèdent. Nous allons prouver que ces deux extensions, moyennant MA, sont équivalentes.

DÉFINITION 3.10. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ est dit $\aleph$-Ramsey si $\mathcal{U}$ est absolu et $\aleph$-stable.

On note $\aleph_R(\mathcal{U}) = \sup\{\aleph, \mathcal{U}$ est $\aleph$-Ramsey$\}$, degré de Ramsey de $\mathcal{U}$, lorsque $\mathcal{U}$ est absolu. Si $\mathcal{U}$ n'est pas absolu, on pose par convention $\aleph_R(\mathcal{U}) = \aleph_0$.

D'après ce qui précède, si $\mathcal{U}$ est absolu, alors $\aleph_R(\mathcal{U}) = \aleph_p(\mathcal{U})$.

THÉORÈME 3.11. (MA.) *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, $\aleph \leqq c$. Il y a équivalence entre*

(1) *$\mathcal{U}$ est $\aleph$-Ramsey*

(2) *$\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ est $\aleph$-additif.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer $\aleph \geqq \aleph_1$, car dans le cas de $\aleph_0$, tout ultrafiltre libre vérifie (1) et (2).

(1) $\Rightarrow$ (2) n'utilise pas l'axiome de Martin. Si $(\mathcal{X}_\xi)_{\xi<\lambda}$, $\lambda < \aleph$, sont des éléments de $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\forall \xi$, $\mathcal{X}_\xi \cap \mathcal{P}_\infty(U)$ est ouvert dans $\mathcal{P}_\infty(U)$. Alors $(\bigcup_\xi \mathcal{U}_\xi) \cap \mathcal{P}_\infty(U)$ est ouvert dans $\mathcal{P}_\infty(U)$, donc borélien, et d'après 1.13, appartient à $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$. Enfin $\mathcal{U}$ est absolu, $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}} = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ d'après 3.1.

(2) $\Rightarrow$ (1) Comme $\aleph \geqq \aleph_1$, $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ est σ-additif, donc $\mathcal{U}$ est absolu (Proposition 3.1). Il reste à prouver que $\mathcal{U}$ est $\aleph$-stable. Mais si $(U_\xi)_{\xi<\lambda}$, $\lambda < \aleph$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}$, on pose pour chaque ξ, $\mathcal{X}_\xi = \{X, X - U_\xi$ est fini$\}$. Les ensembles $\mathcal{X}_\xi \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$, donc d'après (2) $\bigcap_\xi \mathcal{X}_\xi \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$. Donc il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{P}_\infty(U) \subset \bigcap_\xi \mathcal{X}_\xi$ou $\mathcal{P}_\infty(U) \subset \complement \bigcap_\xi \mathcal{X}_\xi$.

Mais d'après le Lemme 3.8, MA implique que $\mathcal{P}_\infty(U) \cap \bigcap_\xi \mathcal{X}_\xi \neq \varnothing$. Donc $U \in \bigcap_\xi \mathcal{X}_\xi$. ■

Nous avons donc trouvé une extension de la notion d'ultrafiltre absolu qui répond au problème de l'additivité de $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$. Nous allons terminer cet article en prouvant deux théorèmes d'existence qui montrent que les notions introduites sont non vides, et en reliant ces résultats au problème de l'additivité de $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$.

THÉORÈME 3.12. (MA.) *Soit $\aleph$ un cardinal régulier, $\aleph_1 \leqq \aleph \leqq 2^{\aleph_0}$. Il existe un ensemble dense d'ultrafiltres de degré de Ramsey $\aleph$.*

DÉMONSTRATION. On utilise la construction du Théorème 3.9, en indexant sur les ordinaux $\alpha > 2^{\aleph_0}$, $\mathcal{B} \cup \{$partitions de $\mathbb{N}\}$, et en construisant si P_α est une partition de $\mathbb{N}$, X_α vérifiant (1) du Théorème 3.9, et

(3) pour tout $X_n^\alpha \in P_\alpha$, $X_\alpha \cap X_n^\alpha \leqq 1$, ou $\exists n$, $X_n^\alpha = X_\alpha$.

L'ultrafiltre $\mathcal{U}$ obtenu vérifie $\mathcal{U}$ absolu d'après (3), et $\mathcal{U}$ $\aleph$-stable non $\aleph^+$-stable d'après la construction de Théorème 3.9.

Pour construire X_α vérifiant (1) et (3), il suffit d'appliquer le lemme suivant de la même manière que dans la construction de 3.9. ■

LEMME 3.13. (MA.) *Soit $P = (A_n)$ une partition de $\mathbb{N}$, et $(\mathcal{X}_\xi)_{\xi<\lambda}$, où $\lambda < c$, une famille de parties de $\mathbb{N}$ telles que $\forall \xi < \lambda$, $\forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $X_\xi - \bigcup_{n\in J} X_n$ est infini. Il existe alors X tel que $\forall n$, $X \cap X_n \leqq 1$ et $\forall \xi$, $X \cap X_\xi$ est infini.*

DÉMONSTRATION. Si $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, notons $Y_J = \complement \bigcup_{n\in J} X_n$. On utilise le forcing suivant:

$\mathcal{P} = \{\langle I, J\rangle,\ I \in P_f(\mathbb{N}),\ \forall n \in J\ \overline{\overline{I \cap X_n}} \leqq 1,\ I \cap Y_J = \varnothing\}$, ordenné par $\langle I, J\rangle \leqq \langle I', J'\rangle$ si $I \subset I'$ et $I' \cup Y_{J'} \subset I \cup Y_J$. $\mathcal{P}$ vérifie le c.a.c. car si $I = I'$, $\langle I, J\rangle$ et $\langle I', J'\rangle$ sont compatibles. Soient $E_n = \{\langle I, J\rangle,\ n \in J\}$ et pour $\xi < \lambda$, $n \in \mathbb{N}$, $D_{\xi,\eta} = \{\langle I, J\rangle\ \overline{\overline{I \cap X_\xi}} \geqq n\}$. Les E_n et les $D_{\xi,\eta}$ sont denses. Si G est générique pour la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (D_{\xi,\eta})_{\xi<\lambda, n\in\mathbb{N}}$, on vérifie aisément que $X = \cup\{I,\ \exists J \langle I, J\rangle \in G\}$ convient. ■

COROLLAIRE 3.14. $(\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1.)$ *L'ensemble des ultrafiltres absolus c-stables et l'ensemble des ultrafiltres absolus non c-stables sont denses dans $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.*

Les résultats que nous venons d'établir permettent de répondre aux problèmes que nous posions au début de cette section concernant l'additivité de la famille $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ selon l'ultrafiltre $\mathcal{U}$:

Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$, nous dirons que $\mathcal{U}$ est $\aleph$-additif, $\aleph \leqq c$, si $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ est $\aleph$-additif, et nous notons $\aleph(\mathcal{U})$, degré d'additivité de $\mathcal{U}$, $\aleph(\mathcal{U}) = \sup\{\aleph,\ \mathcal{U}$ est $\aleph$-additif$\}$. Alors si $\mathcal{U}$ est absolu, $\aleph(\mathcal{U}) = \aleph_R(\mathcal{U})$, et par suite les résultats précédents peuvent s'exprimer par

COROLLAIRE 3.15.

(1) (MA.) *Pour tout $\aleph$ régulier $\aleph_1 \leqq \aleph \leqq c$, l'ensemble des ultrafiltres de degré d'additivité $\aleph$ est dense dans $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.*

(2) $(\mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1.)$ *La classification de $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ par le degré d'additivité établit une distinction à l'intérieur de l'ensemble des ultrafiltres absolus.*

Nous terminerons cet article en montrant que l'$\aleph$-stabilité et la notion d'ultrafiltre absolu sont indépendantes:

THÉORÈME 3.16 (MA.) *Soit $\aleph$ régulier, $\aleph_1 \leqq \aleph \leqq c$. Il existe un ensemble dense dans $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ d'ultrafiltres vérifiant $\aleph_p(\mathcal{U}) = \aleph$, $\aleph_R(\mathcal{U}) = \aleph_0$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{N}$ en ensembles finis, $\operatorname{card} A_n = n$; si X est une partie de $\mathbb{N}$, on note

$$\varphi_n(X) = \operatorname{card} X \cap A_n, \quad \text{et} \quad \varphi(X) = \lim_{n\to\infty} \sup \varphi_n(X).$$

Nous allons d'abord établir un lemme:

LEMME 3.16. (MA.) *Soient* $(A_\xi)_{\xi<\lambda}$ *et* $(B_\xi)_{\xi<\lambda}$, *avec* $\lambda < 2^{\aleph_0}$, *deux familles de parties de* $\mathbb{N}$ *vérifiant*

$$\forall \xi_0, \xi_1 \cdots \xi_n < \lambda, \varphi(B_{\xi_0} \dot{-} \bigcup_1^n A_{\xi_i}) = +\infty.$$

Il existe alors $X \subset \mathbb{N}$ *tel que*

$$X \cap A_\xi \quad \textit{est fini pour} \quad \xi < \lambda, \quad \textit{et} \quad \varphi(X \cap B_\xi) = +\infty, \xi < \lambda.$$

DÉMONSTRATION DE LEMME. Si $J \in P_f(\lambda)$, on note $A'_J = \complement \bigcup_{\xi \in J}$. On définit le forcing suivant:

$\mathcal{P} = \{\langle I, J\rangle \; I \in P_f(\mathbb{N}),\; J \in P_f(\lambda),\; I \cap A'_J = \emptyset\}$ ordonné par $\langle I, J\rangle \leqq \langle I', J'\rangle$ si $I \subset I'$ et $I' \cup A'_{J'} \subset I \cup A'_J$. P vérifie c.a.c. On définit pour tout ξ $E_\xi = \{\langle I, J\rangle, \xi \in J\}$ et pour tous $\xi < \lambda$, $k \in \mathbb{N}$, $D_{\xi,k} = \{\langle I, J\rangle, \exists n \varphi_n(I \cap B_\xi) \geqq k\}$ les E_ξ et les $D_{\xi,k}$ sont denses, et si G est générique pour cette famille, alors $X = \cup\{I, \exists J \langle I, J\rangle \in G\}$ convient. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. On commence par construire grâce au Lemme 3.16 une famille $(X^0_\xi)_{\xi<\aleph}$ de parties vérifiant

$$\xi < \eta \Rightarrow X^0_\eta - X^0_\xi \,\text{est fini, et}\; \xi < \aleph \Rightarrow \varphi(X^0_\xi - X^0_{\xi+1}) = +\infty.$$

Puis on définit par récurrence une famille $(X_\alpha)_{\alpha<c}$, vérifiant

(1) $\forall I \in P_f(2^{\aleph_0})$, $\forall \xi < \aleph$, $\exists \eta(I, \xi)$ tel que $\varphi(X_{I,\xi,\eta}) = +\infty$

(2) si $B_\alpha = \{X^\alpha_\xi,\; \xi < \lambda_\alpha,\; \lambda_\alpha < \aleph\}$ est un élément de B (cf. 3.9) alors

$$\text{ou bien} \quad \forall \xi < \lambda_\alpha, \quad X_\alpha - X^\alpha_\xi \quad \text{est fini}$$

$$\text{ou bien} \quad \exists \xi(\alpha), X_\alpha = \complement X^\alpha_{\xi(\alpha)}.$$

Si $\mathcal{U}$ est engendré par les $(X^0_\xi)_{\xi<\aleph}$ et les $(X_\alpha)_{\alpha<c}$, $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de degré de stabilité $\aleph$ d'après (2) et la construction des X^0_ξ, et $\mathcal{U}$ n'est pas absolu puisqu'il n'est pas selectif pour la partition A_n d'après (1). On peut commencer la récurrence puisque $\forall \eta > \xi$ $\varphi(X_{\phi,\xi,\eta}) = +\infty$. Supposons avoir construit les $(X_\beta)_{\beta<\alpha}$.

1*er cas*: $\forall I \in P_f(\alpha)$, $\forall \xi < \aleph$, $\exists \eta$ (I, ξ) tel que $\forall J \in P_f(\lambda_\alpha)$,

$$\varphi\Big(X_{I,\xi,\eta} \dot{-} \bigcup_{\xi\in J} \complement X_\xi^\alpha\Big) = +\infty.$$

On applique alors le Lemme 3.16 aux $(\complement X_\xi^\alpha)_{\xi<\lambda_\alpha}$ et aux $(X_{I,\xi,\eta(J,\xi)})$, $I \in P_f(\mathbb{N})$, $\xi < \lambda_\alpha$.

X obtenu par ce lemme convient comme X_α.

2ème cas: Sinon, il existe I_0, ξ_0, tel que $\forall\eta$, $\exists J(\eta)$ avec $\varphi(X_{J_0,\xi_0,\eta} - \bigcup_{\xi\in J}\complement X_\xi^\alpha) < +\infty$.

Soit Ψ l'application $\eta < \aleph \mapsto \Psi(\eta) = J$. Il existe, d'après la régularité de $\aleph$ J_0 tel que $\Psi^{-1}(J_0)$ soit cofinal à $\aleph$. Alors, si $X = \bigcup_{z\in J_0}\complement X_z^\alpha$, $X \cap X_{I,\xi,\eta} = X_{I,\xi,\eta} \cap \bigcup_{J_0}\complement X_z^\alpha \supset X_{I,\xi,\eta} \cap X_{I_0,\xi_0,\eta} \cap \bigcup_{J_0}\complement X_z^\alpha = Y$, $\eta' \in \Psi^{-1}(J_0)$, et $Y = X_{(I_0\cup I,\sup(\xi,\xi_0),\inf(\eta,\eta'))} \dot{-} (X_{I_0,\xi_0,\eta'} \dot{-} \bigcup_{J_0}\complement X_z^\alpha)$.

Par suite si $\eta \geqq \eta\ (I \cup I_0, \sup(\xi,\xi_0))$ et $\eta' \geqq \eta$, ce qui est possible puisque $\Psi^{-1}(J_0)$ est cofinal, alors

$$\varphi(Y) = +\infty, \quad \text{donc} \quad \varphi(X \cap X_{J,\xi,\eta}) = +\infty.$$

Comme $X = \bigcup_{z\in J_0}\complement X_z^\alpha$, l'un des z, z_0, est tel que $X_{z_0}^\alpha$ vérifie (1). On pose alors $X_\alpha = X_{z_0}^\alpha$. ∎

REFERENCES

1. A. Blass, *Orderings of ultrafilters*, thèse, Univ. Harvard, 1970.
2. David D. Booth, *Countably indexed ultrafilters*, thèse, Univ. Wisconsin, Madison, 1969.
3. S. D. Chatterji, *A general strong law*, Invent. Math. **9** (1970), 235–245.
4. V. F. Gaposhkin, *Convergence and limit theorems for sequences of random variables*, in *Theory of probabilities and its applications*, SIAM J. Appl. Math. **17** (1972), Sept.
5. J. Komlos, *A generalisation of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 217–229.
6. A. Louveau, *Sur un article de S. Sirota*, Bull. Sci. Math. **96** (1972).
7. A. Louveau, *Une démonstration topologique de théorèmes de Silver et Mathias*, Bull. Sci. Math. **98** (1974), 97–102.
8. D. A. Martin et R. M. Solovay, *Internal Cohen Extensions*, Ann. Math. Logic **2** (1970), 143–178.
9. J. Silver, *Every analytic set is Ramsey*, J. Symbolic Logic **35** (1970), 60–64.

EQUIPE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU C.N.R.S.
UNIVERSITÉ PARIS VI
PARIS, FRANCE